# Chapitre 1: Suites numériques

Terminale, spécialité maths, 2021-2022

## 1 Définition, raisonnement par récurrence

**Définition 1 (suite numérique)**

Une *suite numérique* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de $n$ par la suite $u$ se note $u(n) = u_n$, on l'appelle le *terme* de *rang* $n$ de la suite $u_n$ (ou d'*indice* $n$).

**Remarque 1.** On note traditionnellement la variable d'une suite $n$ (ou $m$, $p$, $q$) et on réserve le $x$ ou le $t$ pour les variables de fonctions définies sur des intervalles.

• La suite est notée entre parenthèses : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement $(u_n)$, et un terme de la suite, sans parenthèse : $u_n$.
C'est la même distinction qu'entre les notations $f$ (une fonction) et $f(x)$ (un nombre, une image).

• Une suite peut être définie à partir d'un entier $n_0$ plutôt que sur $\mathbb{N}$, les énoncés du cours peuvent être adaptés pour de telles suites (remplacer $n\in\mathbb{N}$ par $n \geq n_0$).

⚠ une suite ne peut pas être dérivée : pour être dérivable en $x$, une fonction doit être définie sur un intervalle qui contient $x$.

**Exemple 1** (Suites explicites)**.**

Une suite $(u_n)$ est *explicite* si elle est définie par une fonction $f$ et la relation $u_n = f(n)$, $n\in\mathbb{N}$.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n^2$.

$u_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $u_n + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

• Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$.

$v_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $v_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $v_{2n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $v_{2n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Exemple 2** (Suites définies par récurrence)**.**

Une suite est définie par *récurrence* lorsqu'on en donne un ou plusieurs termes initaux et une relation qui permet de définir un terme en fonction du ou des termes précédents :

• Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 7$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$; $w_{n+1} = w_n - 2$.

$w_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $w_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $w_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $w_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $w_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**Propriété 2 (Raisonnement par récurrence)**

Une propriété $\mathscr{P}(n)$ qui dépend d'un entier $n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ si et seulement si :

- (initialisation) $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- (transmission) pour tout entier $n \geq n_0$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie
  soit en langage mathématique : $\forall n \geq n_0,\ \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$

**Exemple 3.** Soit $r \in \mathbb{R}$ (quelconque donc). Montrons par récurrence que si une suite vérifie $u_{n+1} = r + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (définition d'une suite arithmétique), alors $u_n = r \times n + u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• soient $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_n = n \times r + u_0$ ».
(Note : $\mathscr{P}(n)$ ne dépend bien que de $n$ car $r$ et $u_0$ ont été préalablement fixés)

• initialisation : $u_0 = 0 \times r + u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• transmission : **Soit** $n \in \mathbb{N}$. Cette courte locution doit bien être comprise : elle **fixe un** entier $n$ de valeur **quelconque**.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence), c'est-à-dire $u_n = n \times r + u_0$. On a alors :

$u_{n+1} \overset{\text{def.}}{=\!=} r + u_n \overset{\mathscr{P}(n)}{=\!=} r + n \times r + u_0 = r \times (n+1) + u_0$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On a ainsi démontré que pour l'entier $n$ fixé au début de la rédaction de la transmission, on a : $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
Cette implication étant vraie pour $n$ **arbitraire**, on a en fait montré : $\forall n \geq 0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$

• conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire (c'est-à-dire $\forall n \geq 0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$), donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r \times n + u_0$.

**Exemple 4.** Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».
(Note : $\mathscr{P}(n)$ ne dépend bien que de $n$ car $k$ est une variable muette)

• initialisation : D'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$, et d'autre part, $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• transmission : **Soit** $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On a ainsi montré : $\forall n \geq 0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$

• conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire (c'est-à-dire $\forall n \geq 0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$), donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Exercices 19 page 26 (une proposition juste héréditaire), 40 page 28, 43, 44, 46**

## 2 Suites arithmétiques et géométriques

**Définition 3 (suite arithmétique)**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *arithmétique* de *raison* $r$ ($r \in \mathbb{R}$) si et seulement si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r + u_n$.

**Propriété 4**

① $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r$ si et seulement si, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r \times n + u_0$.

② $\displaystyle 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. ♥

③ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r$, $\sum u_k$ = (nb de termes) × (moyenne des extrêmes)

**Preuve.** ① est démontré dans l'exemple 3, le point ② dans l'exemple 4.

**Exemple 5.** Montrer que la somme des $n$ premiers nombres impairs est un carré.
(récurrence impossible quand on n'a pas la formule explicite)

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=\left(2\sum_{k=1}^{n}k\right)-n=2\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

**Définition 5 (suite géométrique)**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *géométrique* de *raison* $q$ ($q\in\mathbb{R}$) si et seulement si : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=q\times u_n$.

**Propriété 6**

① $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q$ si et seulement si, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=q^n\times u_0$.

② si $q\neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. ♥

③ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q\neq 1$, $\displaystyle\sum u_k=(1^{\text{er}}\text{ terme})\times\frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$

**Preuve du point ②**

*a)* **Par récurrence :**

Soit $q\neq 1$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

(Note : $\mathscr{P}(n)$ ne dépend ni de $k$ ni de $q$)

• initialisation : D'une part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}q^k=q^0=1$ (valable pour $q=0$!)

D'autre part, $\displaystyle\frac{1-q^{0+1}}{1-q}=1$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• transmission : **Soit** $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}q^k=\left(\sum_{k=0}^{n}q^k\right)+q^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence on a donc :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}$, soit par calcul :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

Cette dernière égalité est exactement $\mathscr{P}(n+1)$, on a ainsi démontré : $\forall n\geq 0,\ \mathscr{P}(n)\implies\mathscr{P}(n+1)$

• conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et est héréditaire (c'est-à-dire $\forall n\geq 0,\ \mathscr{P}(n)\implies\mathscr{P}(n+1)$), donc est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

*b)* **Par calcul :**

Soit $q\neq 1$ dans $\mathbb{R}$.

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n}q^k=\sum_{k=0}^{n}q^k-q\sum_{k=0}^{n}q^k=\sum_{k=0}^{n}q^k-\sum_{k=0}^{n}q^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}q^k-\sum_{k=1}^{n+1}q^k=\left(1+\sum_{k=1}^{n}q^k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}q^k+q^{n+1}\right)=1-q^{n+1}$$

**Exemple 6.** Exprimer en fonction de $n\in\mathbb{N}$ : $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ................................................

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}$$

**Exemple 7.** Nature et forme récurrente de la suite $(v_n)$ de l'exemple 1 ? ..............................................

$(v_n)$ géométrique définie par : $v_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=-v_n$ (ne pas oublier $v_0$)

Nature et forme explicite de la suite $(w_n)$ de l'exemple 2 ? ...........................................................

$(w_n)$ arithmétique définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $w_n=7-2n$

# 3 Variations d'une suite

**Définition 7**

À partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- *strictement croissante* si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
- *strictement décroissante* si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.
- *constante* si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

On définit une suite *croissante* ou *décroissante* de même, avec des inégalités larges.

**Propriété 8 (Conditions suffisantes de stricte croissance)**

La suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ est strictement croissante à partir du rang $n_0$ si

① pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

② pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

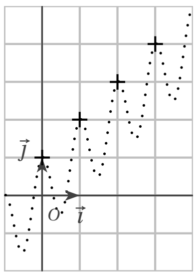
③ pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$ et $f$ strictement croissante sur $[n_0\,;+\infty[$.

**Preuve.** ① : pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$.

② : si $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$

③ : si $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$, et $f \nearrow$ sur $[n_0\,;+\infty[$, alors $f(n+1) > f(n) \iff u_{n+1} > u_n$.

**Exemple 8.** Le dernier critère n'admet pas de réciproque : il se peut que $u_n = f(n)$ où $f$ n'est pas croissante sur $[0,+\infty[$ mais que $(u_n)$ soit strictement croissante.
Par exemple, soit $(a_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \cos(2\pi x)$.
La courbe de $f$ est représentée ci-contre.




Que dire de $f$ ? ................................................................................

Simplifier et conclure : $a_n =$ ................................................................

**Remarque 2.** Évidemment, les critère analogues existent pour montrer qu'une suite est décroissante.
(par exemple, $(u_n)$ est strictement décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n$)

**Remarque 3.** Choisir le critère le plus pertinent.

Souvent l'étude d'une suite explicite passera par l'étude de la fonction associée (critère ③), une suite définie à partir de sommes et de différences s'étudiera bien avec le critère ① et une suite définie avec des quotients ou des produits s'étudiera plutôt par le critère ②.

**Exemple 9.** Sens de variation de $(w_n)$ définie par $w_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ? ........................................

Sens de variation de $(b_n)$ définie par $b_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ? ........................................................

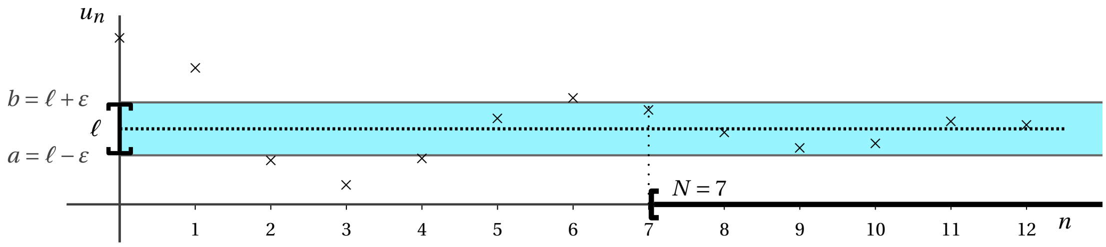
Sens de variation d'une suite arithmétique $(c_n)$ de raison $r$ ? ........................................................

Sens de variation de $(u_n)$ définie par $u_n = 2n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ? ..................................................

## 4 Suites convergentes

**Définition 9 (suite convergente – divergente)**

On dit que la suite $(u_n)$ est *convergente* de limite $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert $]a;b[$ contenant $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $N$.
Une suite est *divergente* si elle ne converge pas.




**Remarque 4.** Pour dire qu'une suite est convergente de limite $\ell$, on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Dans la définition, on peut remplacer « pour tout intervalle $]a;b[$ contenant $\ell$ » par « pour tout intervalle ouvert centré en $\ell$ ». Cette définition s'écrit alors en langage mathématique : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$.

En pratique on utilisera principalement ce résultat pour démontrer des résultats généraux, pour le calcul de limites on utilisera plus souvent des limites de référence.

**Exemple 10.** Montrer que la suite constante $(c_n)$ définie par $c_n = c \in \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ converge.
Soit $]a;b[$ un intervalle ouvert contenant $c$. Il contient tous les termes de la suite (à partir du premier terme)

Montrer que $(d_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $d_n = \frac{1}{n}$ converge.
Soit $\epsilon > 0$. Soit $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$. On a alors pour tout $n > N : 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$, donc $0 - \epsilon < d_n < 0 + \epsilon$,
ce qui est la définition de $(d_n)$ converge vers 0

**Exemple 11.** Traduction en français du langage mathématique :

- $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| < \varepsilon$
  La distance entre $u_n$ et $\ell$ est aussi petite que l'on veut, pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $(u_n)$ n'a pas d'autre choix que d'être la suite constante égale à $\ell$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| < \varepsilon$
  La distance entre $u_N$ et $\ell$ peut être aussi petite que l'on veut (on fixe ce que l'on veut, c'est $\varepsilon > 0$, et on peut trouver un entier $N$ qui rend la distance entre $u_N$ et $\ell$ inférieure à $\varepsilon$) par exemple la suite définie pour tout $n$ par $u_n = (-1)^n(\ell + \frac{1}{n})$
- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$
  Pour un certain entier $N$, la distance entre $u_N$ et $\ell$ peut être aussi petite que l'on veut, donc $u_N = \ell$ **pour cet entier $N$-là** (possiblement que celui-ci, $(u_n)$ n'a aucune raison d'être une suite constante)).
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$ : c'est la définition de $(u_n)$ converge vers $\ell$
  La distance entre $u_n$ et $\ell$ peut être aussi petite que l'on veut, **à partir d'un certain rang $N$ (qui dépend du choix de $\varepsilon$)**, par exemple la suite définie pour tout $n$ par $u_n = \ell + \frac{1}{n}$

**Théorème 10 (Opérations sur les limites)**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ convergentes, de limites respectives $\ell$ et $\ell'$.

① la somme $(u_n + v_n)$ est une suite convergente, de limite $\ell + \ell'$.

② le produit $(u_n \times v_n)$ est une suite convergente de limite $\ell \times \ell'$.

③ si $\ell' \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, alors $(u_n / v_n)$ converge vers $\ell / \ell'$.

**Preuve.** ① soit $\varepsilon > 0$ : comme $(u_n)$ converge vers $\ell$, il existe un range $N_1$ à partir duquel $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$.
Comme $(v_n)$ converge vers $\ell'$, il existe un range $N_2$ à partir duquel $\ell' - \frac{\varepsilon}{2} < v_n < \ell' + \frac{\varepsilon}{2}$.
À partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, on a en ajoutant les inégalités : $\ell + \ell' - \varepsilon < u_n + v_n < \ell + \ell' + \varepsilon$, ce qui signifie que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

② Lemme : Toute suite convergente est bornée.
En effet, soit $(u_n)$ une suite convergente vers $\ell$. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite convergente. On obtient l'existence d'un entier $N$ tel que pour tout $n > N$, $-1 < u_n - \ell < 1$, donc : $-1 + \ell < u_n < 1 + \ell$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq \text{MAX}(u_0;\ u_1;\ \ldots;\ u_N;\ 1+\ell)$ (donc la suite est majorée),
et $u_n \geq \text{MIN}(u_0;\ u_1;\ \ldots;\ u_N;\ -1+\ell)$ (donc la suite est minorée). Finalement, la suite est bornée.
Retour à la preuve qui nous intéresse. Soit $w_n = u_n v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $w_n - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
La suite $(u_n)$ est convergente donc bornée donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-M < u_n < M$, soit :

$$|u_n| < M \tag{1}$$

$(v_n)$ converge vers $\ell'$ donc il existe un entier $N_2$ tel que pour tout $n > N_2$, $-\frac{\varepsilon}{2M} < v_n - \ell' < \frac{\varepsilon}{2M}$, soit :

$$|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2}$$

En multipliant membre à membre les inégalités 2 et 1 **(ce qu'on ne peut faire que pour des membres dont on connaît le signe afin de maîtriser les éventuels changements de sens**, on obtient :
Pour tout $n > N_2$, on a $0 \leq |u_n| \times |v_n - \ell'| < M \times \frac{\varepsilon}{2M}$ soit :

$$\left|u_n(v_n - \ell')\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

$(u_n)$ converge vers $\ell$ donc il existe un entier $N_1$ tel que pour tout $n > N_1$, $-\frac{\varepsilon}{2|\ell'|} < u_n - \ell < \frac{\varepsilon}{2|\ell'|}$, soit :

$$0 \leq |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2|\ell'|}$$

et donc, en multipliant par $\left|\ell'\right|$, pour tout $n > N_1$, on a :

$$\left|\ell'(u_n - \ell)\right| = \left|\ell'\right| \times \left||u_n - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Finalement, en posant $N = \text{MAX}(N_1;\ N_2)$, on a pour tout $n > N$, d'une part par inégalité triangulaire :

$$\left|u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)\right| \leq \left|u_n(v_n - \ell')\right| + \left|\ell'(u_n - \ell)\right|$$

et d'autre part en sommant 3 et 4 :
$\left|u_n(v_n - \ell')\right| + \left|\ell'(u_n - \ell)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$
Soit finalement,pour tout $n > N$, $|w_n - \ell\ell'| < \varepsilon$, ce qui est la définition de $(w_n)$ convergente vers $\ell\ell'$

③ Le point délicat de la rédaction est de penser à trouver un entier $N$ tel que pour tout $n > N$, $v_n \neq 0$ (car bien sûr, on ne peut pas diviser par 0)

**Exemple 12.** Soit $(z_n)$ définie par $z_n = 3 - \dfrac{2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'elle converge et calculer sa limite.

On se doute bien que la limite est 3.
On veut donc démontrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\left|z_n - 3\right| < \varepsilon$
Pour trouver cet entier $N$, on va brutalement trouver tous les entiers $n$ tels que $\left|z_n - 3\right| < \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\left|z_n - 3\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < z_n - 3 < \varepsilon \iff 3 - \varepsilon < 3 - \dfrac{2}{n^2} < 3 + \varepsilon \iff -\varepsilon < \dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$ et donc :

$$\left|z_n - 3\right| < \varepsilon \iff \begin{cases} -\varepsilon & < & \dfrac{2}{n^2} \\ \dfrac{2}{n^2} & < & \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} -n^2 & < & \dfrac{2}{\varepsilon} \\ n^2 & > & \dfrac{2}{\varepsilon} \end{cases} \iff \begin{cases} n^2 & > & -\dfrac{2}{\varepsilon} \\ n^2 & > & \dfrac{2}{\varepsilon} \end{cases} \iff n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$$

Finalement, un entier $N$ tel qu'on le cherchait initialement est $N = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$

**Remarque 5.** Il existe deux cas de divergence pour une suite $(u_n)$ :

① soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$

② soit la suite « oscille », « n'a pas de tendance à long terme » : $u_n = (-1)^n$, $u_n = n\cos n, \ldots$

## 5 Suites de limite infinie

**Définition 11 (Suites de limite infinie)**

On dit que la suite $(u_n)$ tend vers plus l'infini lorsque $n$ tend vers plus l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle de la forme $[A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $N$.
En écriture mathématique : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N, u_n > A$.
On dit que la suite $(u_n)$ tend vers moins l'infini lorsque $n$ tend vers plus l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.

**Exemple 13.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $N = \lfloor A \rfloor + 1$. On a bien : $\forall n \geq N, u_n > A$

En se basant sur les définitions, on peut prouver les résultats suivants :

### 5.1 Somme de limites

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ⚠ ? ⚠ |

### 5.2 Produit de limites

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ⚠ ? ⚠ |

### 5.3 Quotient de limites

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell \neq 0$ | $\pm\infty$ | $0$, $v_n > 0$ pour tout $n$ | $0$, $v_n < 0$ pour tout $n$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n}$ | $\dfrac{1}{\ell}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Remarque 6.** Lorsque la situation est indeterminée, il faut changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination. Une méthode efficace est de forcer la factorisation par le terme qui semble devoir l'emporter.

**Exemple 14.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-3n^2$ ..........................................................................................

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 - n$ ..........................................................................................

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1}$ ..........................................................................................

**Exercices 51->57 page 142 (algo+definition)**
**Exercices 59 (pas de FI) page 142, 62, 63 page 143**

# 6 Limite et comparaisons

## 6.1 Théorème d'encadrement

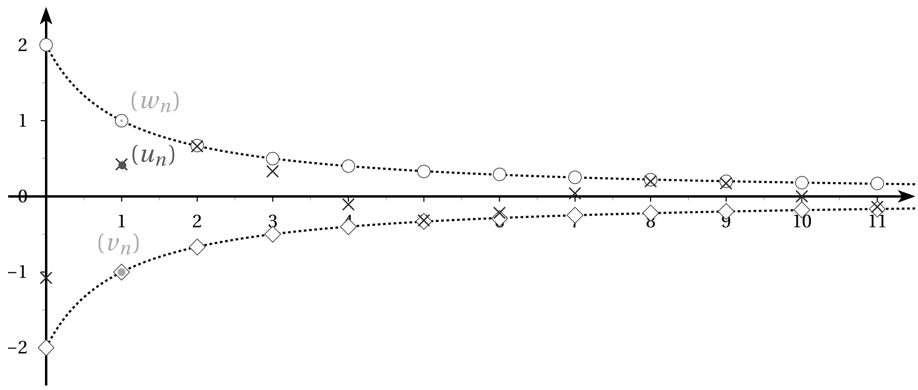
**Théorème 12**

① si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ♥

② si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

③ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

**Remarque 7.** Le point ③ est parfois appelé « théorème des gendarmes »




**Preuve.** ① : on doit prouver que pour tout $A > 0$, il existe un rang $N$ à partir duquel $u_n > A$.

Soit $A > 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > A$. Or $u_n > v_n$ donc $u_n > v_n > A$. D'où par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

② : par hypothèse, $-v_n \leq -u_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} -v_n = +\infty$, donc d'après ①, $\lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

③ : comme $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers $\ell$, pour tout intervalle $]a, b[$ contenant $\ell$, tous les termes de $(v_n)$ à partir d'un certain rang $N_1$ et tous les termes de $(w_n)$ à partir d'un certain rang $N_2$ sont dans $]a, b[$. Pour tout $n > N = \max(N_1, N_2)$ on a donc $a < v_n \leq u_n \leq w_n < b$ donc tous les termes de $(u_n)$ sont dans $]a, b[$ à partir du rang $N$ : $(u_n)$ converge vers $\ell$.

**Exemple 15.** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ ? ..........................................................................................

$\lim\limits_{n \to +\infty} n + (-1)^n$ ? ..........................................................................................

**Remarque 8.** Les inégalités larges passent à la limite (si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$) mais pas les inégalités strictes. Exemple : $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a $u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

**Exercices 64->67 page 143**

### 6.2 Limites de $q^n$ selon les valeurs de $q$

**Théorème 13 (Limite (éventuelle) d'une suite géométrique)**

① si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. ♥ ② si $-1 \leq q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

③ si $q \leq -1$, $q^n$ n'a pas de limite. ④ si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

**Preuve.** ① : soit $x \in ]0;+\infty]$ montrons par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, « $(1+x)^n \geq 1+nx$ » (inégalité de Bernoulli)

• initialisation : $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1+0\times x$ donc la propriété est vraie au rang 0.

• transmission : on suppose la propriété vraie pour un rang $n$ : $(1+x)^n \geq 1+nx$, en multipliant par $1+x$, il vient $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

• Par récurrence, la propriété est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $q > 1$ alors $x = q-1 > 0$ et on a : $q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} nx = +\infty$ donc par le théorème de minoration (théorème 6.1, point ①), $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

② : si $q = 0$, c'est évident (suite constante). Sinon, $\dfrac{1}{|q|} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{|q|^n} = +\infty$, d'où par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

③ : si $q < -1$ alors $|q| > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$ : $(q^n)$ ne peut converger. Comme les signes de deux termes consécutifs de $(q^n)$ sont opposés, $(q^n)$ ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

**Exemple 16.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ ..........................................................................

**Exercices 71, 72, 78 page 144**

### 6.3 Majoration d'une suite convergente et croissante

**Propriété 14**

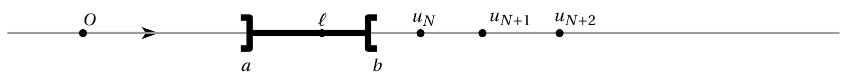
Une suite $(u_n)$ croissante qui converge vers une limite $\ell$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. ♥

**Preuve.** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell$.

Comme $(u_n)$ est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq \ell$.

Mais alors, si $b = \dfrac{u_N+\ell}{2}$ et $a = \ell - 1$, l'intervalle $]a;b[$ ne contient pas tous les termes de la suite à partir de certain rang (l'ensemble des termes qui sont dedans est fini), ce qui contredit la définition 4 de suite convergente.

Par conséquent, l'hypothèse formulée est fausse et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_N \leq \ell$.



## 7 Suites bornées

**Définition 15 (suite bornée)**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *minorée* $\iff$ il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$. ($m$ est un minorant)
- *majorée* $\iff$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ M \geq u_n$. ($M$ est un majorant)
- *bornée* $\iff$ elle est majorée et minorée.

**Exemple 17.** Que signifie : $(u_n)$ est une suite non majorée? $\forall A \in R, \exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$

**Propriété 16**

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$. ♥

**Preuve.** Soit $(u_n)$ une suite croissante et non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
$(u_n)$ est non majorée donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.
$(u_n)$ est croissante donc pour tout $n > N$, $u_n > u_N$.
Finalement, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n > u_N > A$.
On a donc montré : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n > A$.

**Théorème 17 (Convergence monotone)**

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

**Idée.** une suite croissante ne peut « osciller » ni tendre vers $-\infty$, et une suite majorée ne peut tendre vers $+\infty$ : une suite vérifiant ces deux propriétés converge certainement.

**Exemple 18.** Donner un exemple de suite :

• croissante qui ne converge pas : ..........................................................................................

• majorée qui ne converge pas : ..............................................................................................

**Exemple 19.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1;3]$ puis que pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{f(u_n)}{u_{n+1}+u_n}$ où $f(x) = 6 + x - x^2$. étudier les variations puis signe de $f$ sur $[1;3]$, en déduire $(u_n)$ croissante.

La suite $(u_n)$ est-elle convergente?

Exercices 84, 85, 86, 87, 89, 94 page 145